КРАТКИЙ

СПРАВОЧНИК

по математике (геометрия)

# ГЕОМЕТРИЯ

# Предмет геометрии

Геометрия изучает пространственные свойства предметов, оставляя в стороне все остальные их признаки. Например, резиновый мяч диаметром 25 см и чугунное ядро того же диаметра отличаются друг от друга по весу, по цвету, по твердости и т. д. Однако все эти признаки мяча и ядра в геометрии оставляются без внимания; пространственные же их свойства (форма и размеры) одинаковы. С точки зрения геометрии каждый из этих предметов представляет *шар* диаметром 25 см.

Предмет, от которого мысленно отняты все его свойства, кроме пространственных, называется *геометрическим телом*. Шар есть одно из геометрических тел.

Идя дальше по пути отвлечения, мы получаем, понятия геометрической *поверхности*, геометрической *линии* и геометрической *точки*. Поверхность мы мысленно отделяем от тела, которому она принадлежит, и лишаем ее толщины. Линию мы лишаем толщины и ширины, а точку вовсе лишаем измерений. Мы мыслим, что точка может служить границей линии (или ее части), линия — границей поверхности и поверхность — границей тела. Мы мыслим также, что точка может двигаться и своим движением порождать линию, линия может движением порождать поверхность, а поверхность — порождать тело.

В природе нет точек, лишенных измерений, но есть предметы столь малых размеров, что их в некоторых условиях можно принять за геометрические точки. В природе нет также ни геометрических, линий, ни геометрических поверхностей, но все свойства линий и поверхностей, найденные в геометрии, находят многообразные применения в науке и технике. Это происходит потому, что геометрические понятия порождены пространственными свойствами действительного мира. Отвлеченная форма геометрических понятий для того и служит, чтобы эти свойства изучать в чистом их виде.

# Исторические сведения о развитии геометрии

Первые геометрические понятия приобретены людьми в глубокой древности. Они возникли из потребности определять вместимость различных предметов (сосудов, амбаров и т. п.) и площади земельных участков. Древнейшие известные нам письменные памятники, содержащие правила для определения площадей и объемов, были составлены в Египте и Вавилоне около 4 тысяч лет назад. Около 21/2 тысяч лет назад греки заимствовали у египтян и вавилонян их геометрические знания. Первоначально эти знания применялись преимущественно для измерения земельных участков. Отсюда и греческое название "геометрия", что означает "землемерие".

Греческие ученые открыли множество геометрических свойств и создали стройную систему геометрических знаний. В ее основу они положили простейшие геометрические свойства, подсказанные опытом. Остальные свойства выводились из простейших с помощью рассуждений.

Эта система около 300 г. до н. э. получила завершенный вида "Началах" Евклида, где изложены также основы теоретической арифметики. Геометрические разделы "Начал" по содержанию и по строгости изложения примерно совпадают с нынешними школьными учебниками геометрии.

Однако там ничего не говорится ни об объеме, ни о поверхности шара, ни об отношении окружности к диаметру (хотя есть теорема о том, что площади кругов относятся, как квадраты диаметров). Приближенная величина этого отношения была известна из опыта задолго до Евклида, но только в середине 3 века до н. э. Архимед (287 — 212 гг.) строго доказал, что отношение окружности к диаметру (т. е., по-нашему, число ) заключено между 31/7 и 310/70. Архимед доказал также, что объем шара меньше объема описанного цилиндра ровно в 11/2 раза и что поверхность шара в 11/2 раза меньше полной поверхности описанного цилиндра.

В способах, примененных Архимедом для решения упомянутых задач, содержатся зачатки методов высшей математики. Эти способы Архимед применил к решению многих трудных задач геометрии и механики, очень важных для строительного дела и для мореплавания. В частности, он определил объемы и центры тяжести многих тел и изучил вопрос о равновесии плавающих тел различной формы.

Греческие геометры исследовали свойства многих линий, важных для практики и для теории. Особенно полно они изучили *конические сечения*. Во втором веке до н. э. Аполлоний обогатил теорию конических сечений многими важными открытиями, остававшимися непревзойденными в течение 18 веков.

Для изучения конических сечений Аполлоний пользовался методом *координат*. К изучению всевозможных линий на плоскости этот метод был применен лишь в 30-х годах 17 века французскими учеными Ферма (1601—1655) и Декартом (1596—1650). Для технической практики того времени было достаточно плоских линий. Лишь сто лет спустя, когда этого потребовали возросшие запросы астрономии, геодезии и механики, координатный метод был применен к изучению кривых поверхностей и линий, проведенных на кривых поверхностях.

Более двух тысяч лет система Евклида считалась непреложной. Но в 1826 г. гениальный русский ученый Николай Иванович Лобачевский создал новую геометрическую систему. Исходные ее положения отличаются от основных положений, Евклида лишь в одном пункте (В геометрии Эвклида через точку *А* проходит только одна прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой *BC* и не пересекающая её. В геометрии Лобачевского таких прямых бесчисленное множество). Но отсюда вытекает множество очень существенных особенностей.

Так, в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше, чем 180° (в геометрии Евклида она равна 180°). При этом недостаток до 180° тем больше, чем больше площадь треугольника.

Может показаться, что опыт опровергает этот и другие выводы Лобачевского. Но это не так. Непосредственно измеряя углы треугольника, мы находим, что они в сумме составляют примерно 180°. Точной же величины суммы мы не можем найти вследствие несовершенства измерительных инструментов. Между тем все те треугольники, которые доступны нашему измерению, слишком малы, чтобы непосредственными измерениями обнаружить недостаток суммы углов до 180°.

При дальнейшем развитии гениальных идей Лобачевского оказалось, что система Евклида недостаточна для исследования многих вопросов астрономии и физики, где мы имеем дело с фигурами огромных размеров. Однако в условиях обычного опыта она остается вполне пригодной. А так как к тому же она обладает преимуществом простоты, то её применяют и будут применять в технических расчетах, её изучают и будут изучать в школах.

# Аксиомы геометрии

*Основные свойства принадлежности точек и прямых*

**А-I**1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

**А-I**2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

*Основные свойства взаимного расположения точек на прямой и на плоскости*

**А-II**1 Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

**А-II**2. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

*Основные свойства измерения отрезков и углов*

**А-III**1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

**А-III**2. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

*Основные свойства откладывания отрезков и углов*

**А-IV**1. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

**А-IV**2. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

*Существование треугольника, равного данному*

**А-IV**3. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

*Основное свойство параллельных прямых*

**А-V**1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

*Основные свойства плоскостей в пространстве*

**C1**. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

**С2**. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

**С3**. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

# Треугольники

|  |
| --- |
| geo1_0 |

*a, b, c* - стороны треугольника.

*a, b, g* - внутренние углы треугольника.

*aў, bў, gў* - внешние углы треугольника.

*ha , hb , hc* - высоты треугольника, опущенные из вершин треугольника на прямые, содержащие соответствующие противоположные стороны   *a, b, c*.

*ma , mb , mc* - медианы треугольника, соединяющие вершины треугольника с серединами противолежащих сторон *a, b, c*.

*la , lb , lc* - биссектрисы треугольника, соединяющие вершины треугольника с точками на противолежащих сторонах *a, b, c*.

*MN* - средняя линия треугольника.

*Р* - периметр треугольника.

*р* - полупериметр треугольника.

*R* - радиус окружности, описанной около треугольника.

*r* - радиус окружности, вписанной в треугольник.

*SABC* - площадь треугольника АВС.

*Сумма углов треугольника*

a + b + g = 180°.

*Свойства внешних углов треугольника*

aў = b + g,   bў = a + g,   gў = a + b,

aў > b,   aў > g,    bў > a,   bў > g,    gў > a,   gў > b,

*Неравенство треугольника*

*a < b + c,    b < a + с,    c < a + b.*

|  |
| --- |
| geo1_1 |

*Теорема синусов*  
geo1_2  
*Теорема косинусов*  
*a2=b2+c2-2bc cosa,*  
*b2=a2+c2-2ac cosb,*  
*c2=a2+b2-2ab cosg,*  
  
*Периметр и полупериметр треугольника*  
geo1_3

*Свойства средней линии треугольника*

|  |  |
| --- | --- |
| geo1_4 | geo1_5 |

*Площадь треугольника*  
geo1_6,       geo1_7,       geo1_8  
geo1_9,       geo1_10,       geo1_11  
geo1_12(формула Герона)  
*Равнобедренный треугольник*  
a=c,   Рa=Рg,  
  
*hb=mb=lb.*   
*Равносторонний треугольник*  
*a=b=c,    a=b=g=60°;*  
  
*ha=la=ma,    hb=lb=mb,    hc=lc=mc;*  
  
geo1_13,    geo1_14,    geo1_15

|  |
| --- |
| geo1_16 |

*Прямоугольный треугольник*

*a* *=90°, b, c* - катеты, *a* - гипотенуза,

*a2=b2+c2* (теорема Пифагора);  
geo1_17     geo1_18  
geo1_19     geo1_20     geo1_21  
geo1_22     geo1_23     geo1_24

# Четырехугольники

*Параллелограмм*

|  |
| --- |
| geo2_0 |

*a, b* - стороны параллелограмма.

*ha, hb* - высоты параллелограмма, опущенные из вершин параллелограмма на прямые, содержащие стороны параллелограмма *a, b*.

*d1, d2* - диагонали параллелограмма.  
a, g - углы параллелограмма, a + g = 180°

*Площадь параллелограмма*

***S=aha , S=bhb , S=absin.***

*Связь между сторонами и диагоналями параллелограмма*

***d12+d22=2(a2+b2)***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Прямоугольник* geo2_1 geo2_4 | *Ромб* geo2_2 geo2_5 | *Квадрат* geo2_3 geo2_6 |

|  |  |
| --- | --- |
| *Трапеция* geo2_8geo2_9 *MN*-средняя линия трапеции; geo2_10 | *Равнобокая трапеция* geo2_7 ***AB=CD,* *d1=d2*** |

# Окружность и круг

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| geo3_0 | geo3_1 | geo3_2 | geo3_3 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *R* - *радиус окружности (круга),*  *C=2 R* - *длина окружности,*  *D=2к - диаметр*   |  |  | | --- | --- | | geo3_4 | - *длина дуги*, |   *S= R2* = - *площадь круга,*   |  |  | | --- | --- | | geo3_5 | - *площадь кругового сектора*, |  |  |  | | --- | --- | | geo3_6 | - *площадь кругового сегмента*. | |

# Правильные многоугольники

|  |  |
| --- | --- |
| geo4_0 | geo4_1 geo4_2      geo4_3 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид правильного многоугольника | a | R | r | Сумма углов |
| Треугольник | 60° | geo4_4 | geo4_5 | 180° |
| Четырехугольник | 90° | geo4_6 | geo4_7 | 360° |
| Шестиугольник | 120° | *a* | geo4_8 | 720° |

# Объемы и площади поверхностей тел

***Наклонная призма***    Объем наклонной призмы

***V=Sпсa*,**

где *Sпс* - площадь перпендикулярного сечения наклонной призмы, *a* - боковое ребро.

Площадь боковой поверхности наклонной призмы

***Sб=Pпсa*,**

где *Pпс* - периметр перпендикулярного сечения наклонной призмы, *a* - боковое ребро.

Площадь полной поверхности наклонной призмы

***Sп=Sб+2Sосн*,**

где *Sб*, - площадь боковой поверхности наклонной призмы, *Sосн* - площадь её основания.

***Прямая призма***    Объем прямой призмы

***V=Sоснa*,**

где *Sосн* - площадь основания прямой призмы, *a* - боковое ребро.

Площадь боковой поверхности прямой призмы

***Sб=Pоснa*,**

где *Pосн* - периметр основания прямой призмы, *a* - боковое ребро.

Площадь полной поверхности прямой призмы

***Sп=Sб+2Sосн*,**

где *Sб*, - площадь боковой поверхности прямой призмы, *Sосн* - площадь основания.

***Прямоугольный параллелепипед***  
    Объем прямоугольного параллелепипеда

***V=abc*,**

где *a,b,c* - измерения прямоугольного параллелепипеда.

Площадь боковой поверхности параллелепипеда

***Sб=2c(a+b)*,**

где *a, b* - стороны основания, *c* - боковое ребро прямоугольного параллелепипеда.

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда

***Sп=2(ab+bc+ac)*,**

где *a,b,c* - измерения прямоугольного параллелепипеда.

***Куб***

***V=a3, Sб=4a2, Sп=6a2*,**

где *a* - ребро куба.

***Пирамида***

   Объем пирамиды

geo5_0

где *Sосн* - площадь основания, *H* - высота.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей её боковых граней.

Площадь полной поверхности пирамиды

***Sп=Sб+2Sосн*,**

где *Sб* - площадь боковой поверхности прямой пирамиды, *Sосн* - площадь основания.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

geo5_1

где *Pосн* - периметр основания правильной пирамиды, *l* - её апофема.

***Усеченная пирамида***

   Объем усеченной пирамиды

geo5_2

где *S1 , S2* - площади оснований усеченной пирамиды, *H* - её высота.

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды

***Sп=Sб+S1+S2 ,***

где *Sб* - площадь боковой поверхности пирамиды, *S1 , S2* - площади оснований.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

geo5_3

где *P1 , P2* - периметры оснований, а *l* - ее апофема.

***Цилиндр***

   Объем цилиндра

***V=p R 2H ,***

где *R* - радиус основания цилиндра, а *H* - его высота.

Площадь боковой поверхности цилиндра

***Sб=2p R H ,***

где *R* - радиус основания цилиндра, а *H* - его высота.

Площадь полной поверхности цилиндра

***Sп=2p R H + 2p R2,***

где *R* - радиус основания цилиндра, а *H* - его высота.

***Конус***

   Объем конуса

geo5_4

где *R* - радиус основания конуса, а *H* - его высота.

Площадь боковой поверхности конуса.

***Sб=2p R L ,***

где *R* - радиус основания конуса, а *L* - его образующая.

Площадь полной поверхности конуса

***Sп=2p R (R+L),***

где *R* - радиус основания конуса, а *L* - его образующая.

***Усеченный конус***

   Объем усеченного конуса

geo5_5

где *R, r* - радиусы оснований усеченного конуса, *Н* - его высота.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

***Sб=p L (R+r),***

где *R, r* - радиусы оснований усеченного конуса, *L* - его образующая.

Площадь полной поверхности усеченного конуса

***Sп=p L (R+r)+p R2+p r2,***

где *R, r* - радиусы оснований усеченного конуса, *L* - его образующая.

***Сфера и шар***

   Объем шара

geo5_6

где *R* - радиус шара.

Площадь сферы (площадь поверхности шара)

***S=4p R2,***

где *R* - радиус сферы.

Объем шарового сегмента

geo5_7

где *H* - высота шарового сегмента, *R* - радиус шара.

Объем шарового сектора

geo5_8

где *H* - высота соответствующего шарового сектора, *R* - радиус шара.