

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ОТИ НИЯУ МИФИ

2021 год

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Постройте график функции  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(\pi x n!) \right)$ .

3. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\sin \pi x}.$$

4. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть функция разрывная?

5. Найти  $f^{(2016)}(0)$  и  $f^{(2017)}(0)$  для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

6. Известно, что  $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$ . Найти  $f(x)$  при  $0 < x < 1$ .

7. Известно, что  $\int_0^x f(t) dt = x^5 + e^{x-1}$ . Найти  $f(1)$ .

8. Вычислить интеграл

$$\int_{-0,5}^{0,5} \cos x \cdot \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) dx$$

9. Доказать, что поток радиус-вектора  $\vec{r}$  через любую замкнутую поверхность равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

10. Найти минимум функции

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}.$$

11. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + xy'' = 2yy', \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!**